

УДК 539.3

А. Сяський, докт. техн. наук; Н. Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА

Резюме. Розглянуто мішану контактну задачу для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска за наявності на лінії розмежування матеріалів зон спаю, гладкого контакту і відставання. Використовуючи інтегральні подання компонент вектора зміщення контурних точок, побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для визначення контактних зусиль. Напружений стан на контурі отвору пластинки досліджено методом механічних квадратур і колокації.

Ключові слова: нескінченна пластинка, еліптичний отвір, зона спаю, зона контакту, ортотропні матеріали, напружений стан, інтегрально-диференціальні рівняння.

A. Syasky, N. Shynkarchuk

MIXED CONTACT PROBLEM FOR AN ORTHOTROPIC PLATE WITH ELLIPTIC HOLE AND HARD DISK

The summary. We are researching a mixed contact problem for an orthotropic plate with elliptic hole and a hard disk when zones of spayed materials, zones of smooth contact and ones of disconnection are present on the boundary line. The system of singular integral-differential equations to determine contact efforts was built by using the integral representation displaced contour points vector. Stress state on the contour of plate hole is testing by the method of mechanical quadrature and collocation.

Key words: an infinite plate, an elliptical hole, spayu zone, contact zone, orthotropic materials, a stained state, integral-differential equations.

Деталі машин і елементи конструкцій у вигляді кусково-однорідних пластин широко використовуються в інженерній практиці. Їх роботоздатність у багатьох випадках визначається наявністю на лінії розмежування матеріалів концентраторів напружень (розрізів, тріщин). Через це значний теоретичний та практичний інтерес становить вивчення розподілу напружень і деформацій в околі таких дефектів.

Постановку задачі про розподіл напружень в кусково-однорідній пластинці за наявності на лінії розмежування матеріалів розрізів або тріщин здійснено в [1].

Використовуючи метод лінійного спряження в роботах [2,3], розглянуто низку задач для однорідної та кусково-однорідної пластинки з коловими розрізами.

Мішану контактну задачу для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска досліджено в [4]. Формулюючи граничні умови спаю у вигляді рівності деформацій контурів пластинки і диска, а умови контактування – у вигляді рівності їх кривин, побудовано системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для визначення напружень між пластинкою і диском.

Запропоновано новий підхід до визначення розподілу напружень на контурі еліптичного отвору нескінченної ортотропної пластинки при його неповному контакті з абсолютно жорстким диском.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з еліптичним отвором. Середню площину пластинки віднесемо до системи прямокутних (x, y) і полярних (r, φ) координат з полюсом у центрі отвору. Здійснимо конформне відображення зовнішності одиничного кола $\gamma (\rho_0=1)$ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка в площині $z=x+iy$, застосувавши функцію [5]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right), \quad (1)$$

де $R_0 = \frac{a+b}{2} = 1$; $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$; $a = 1 + \varepsilon$, $b = 1 - \varepsilon$ – півосі еліпса; ε – ексцентриситет еліпса; (ρ, λ) – полярна система координат у площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$.

Допустимо, що в отвір пластинки без зазору і натягу вставлено абсолютно жорсткий диск такої ж форми. На ділянці $\Gamma_3 = [\pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*]$ контуру Γ диск спаяний з пластинкою. В його центрі прикладено зосереджену силу (X_0, Y_0) та зосереджену пару сил з моментом M_0 , унаслідок чого на ділянці $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ пластинка вступає в контакт з диском. На ділянках $\Gamma_2 = [\beta_0^*, \pi + \alpha_1^*] \cup [\pi + \beta_1^*, 2\pi + \alpha_0^*]$ контакт між пластинкою і диском відсутній (рис. 1).

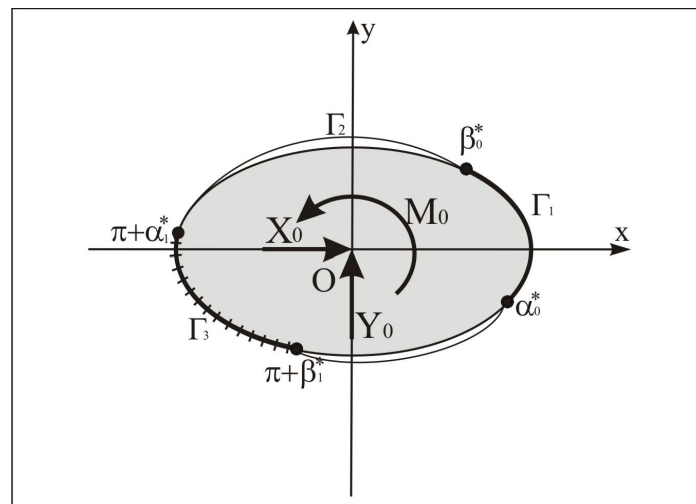


Рисунок 1. Розрахункова схема задачі

Тут $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*$ – полярні кути межових точок ділянок контакту $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$ та спаю $[\pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*]$.

Розв'язок задачі полягає у визначенні компонентів напружено-деформованого стану на контурі отвору пластинки, величини зон контакту та відставання, кута повороту диска.

Інтегральні рівняння задачі. Вирази для компонентів вектора зміщення контурних точок пластинки (u, v) та жорсткого диска (u^d, v^d) при заданому навантаженні запишемо у вигляді [6,7]

$$\begin{aligned} 2E_x h u = & (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{Y_0 (\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{\pi} \lambda + \\ & + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi + \alpha_1}^{\pi + \beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + c_1 \right]; \\ 2E_x h v = & (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{X_0 (\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{\pi} \lambda - \end{aligned}$$

$$-\frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi}\left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt+\int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt+c_2\right], \quad \lambda\in\gamma;$$

$$(u^0+iv^0)=(U_0+iV_0)+e^{i\varphi_0}\left(\sigma+\frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}}\right), \quad (2)$$

де $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ – образи кутів $\alpha_0^*, \beta_0^*, \alpha_1^*, \beta_1^*$ при відображенні (1); E_x, ν_x – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини в напрямку осі Ox ; β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [5]; c_1, c_2 – сталі;

$$f_1+if_2=i\int_{\alpha_0}^{\lambda}(T_\rho^*+iS_{\rho\lambda}^*)e^{it}dt; \quad T_\rho^*+iS_{\rho\lambda}^*=(T_\rho+iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma); \quad \sigma=e^{i\lambda};$$

$T_\rho, S_{\rho\lambda}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору пластинки; U_0, V_0 – жорстке лінійне зміщення диска, φ_0 – кут його повороту.

Граничні умови задачі в зоні контакту $[\alpha_0, \beta_0]$ приймаємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска. За відсутності сил тертя їх можна записати так [8]:

$$a(\lambda)u+b(\lambda)v=\varepsilon N\varphi_0\sin(N\lambda)+a(\lambda)U_0+b(\lambda)V_0; \quad S_{\rho\lambda}=0, \quad \lambda\in\gamma_1. \quad (3)$$

Тут $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – образи ділянок $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ при відображенні (1);

$$a(\lambda)+ib(\lambda)=(\alpha+i\beta)e^{i\lambda}; \quad \alpha+i\beta=\omega'(\sigma); \quad \alpha=1-\varepsilon(N-1)\cos N\lambda; \quad \beta=\varepsilon(N-1)\sin N\lambda;$$

$$a(\lambda)=\cos\lambda-\varepsilon(N-1)\cos((N-1)\lambda); \quad b(\lambda)=\sin\lambda+\varepsilon(N-1)\sin((N-1)\lambda).$$

В зоні спаю $[\pi+\alpha_1, \pi+\beta_1]$ пластинки і диска граничні умови записуємо у вигляді рівності зміщень їх контурних точок [8]

$$u=U_0-(\sin\lambda-\varepsilon\sin((N-1)\lambda))\varphi_0; \quad v=V_0+(\cos\lambda+\varepsilon\cos((N-1)\lambda))\varphi_0, \quad \lambda\in\gamma_3. \quad (4)$$

Підставляючи (2) в граничні умови (3), (4), отримаємо систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій f_1', f_2' на ділянці контакту і в зоні спаю

$$a(\lambda)\left[(\beta_1\beta_2-\nu_x)\int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t)dt+\frac{\beta_1+\beta_2}{\pi}\left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt+\int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt\right]-\frac{Y_0(\beta_1\beta_2-\nu_x)}{\pi}\lambda\right]+b(\lambda)\left[(\beta_1\beta_2-\nu_x)\int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t)dt+\frac{X_0(\beta_1\beta_2-\nu_x)}{\pi}\lambda-\frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi}\times\right. \\ \left.\times\left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt+\int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt\right]\right]=2E_x h\varepsilon N\varphi_0\sin(N\lambda)+a(\lambda)\tilde{c}_1+b(\lambda)\tilde{c}_2,$$

$$f_1'(\lambda)a(\lambda)+f_2'(\lambda)b(\lambda)=0, \quad \lambda\in\gamma_1; \quad (5)$$

$$(\beta_1\beta_2-\nu_x)\left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t)dt+\int_{\pi+\alpha_1}^{\lambda} f_1'(t)dt\right]+\frac{\beta_1+\beta_2}{\pi}\left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt+\int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt\right]-\frac{Y_0(\beta_1\beta_2-\nu_x)}{\pi}\lambda=\tilde{c}_1-2E_x h(\sin\lambda-\varepsilon\sin((N-1)\lambda))\varphi_0;$$

$$(\beta_1\beta_2-\nu_x)\left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t)dt+\int_{\pi+\alpha_1}^{\lambda} f_2'(t)dt\right]-\frac{\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi}\left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t)\ln\left|\sin\frac{\lambda-t}{2}\right|dt+\right.$$

$$+ \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \Bigg] + \frac{X_0}{\pi} \frac{(\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2} \lambda = \tilde{c}_2 + 2E_x h (\cos \lambda + \varepsilon \cos((N-1)\lambda)) \varphi_0, \quad \lambda \in \gamma_3, \quad (6)$$

де $\tilde{c}_1 = 2E_x h U_0 - c_1$, $\tilde{c}_2 = 2E_x h V_0 - c_2$.

Крім системи рівнянь (5),(6) повинні виконуватися умови силової й моментної рівноваги диска [8]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) dt = -X_0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) dt = Y_0; \quad (7)$$

$$M_0 = \left(\int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1'(t) \cos t + f_2'(t) \sin t] dt + \varepsilon \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1'(t) \cos((N-1)t) + f_2'(t) \sin((N-1)t)] dt \right) -$$

$$- \left(\int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} [f_1'(t) \cos t + f_2'(t) \sin t] dt + \varepsilon \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} [f_1'(t) \cos((N-1)t) + f_2'(t) \sin((N-1)t)] dt \right),$$

які служать для визначення сталих $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \varphi_0$.

Якщо функції $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ стануть відомі, то контактні зусилля на контурі отвору пластинки можна визначити за формулою [7]

$$T_\rho + iS_{\rho\lambda} = \frac{(f_2'(\lambda) - if_1'(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (8)$$

Кільцеві зусилля T_λ на контурі Γ знаходимо із співвідношення [7]

$$T_\lambda = -T_\rho - \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \left[(l_1 l_2 + (a+b)l_4 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda) R_1 + ((a+b)l_1 - l_2 l_4) R_2 \sin \lambda \cos \lambda \right] -$$

$$- \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{4\Delta_1\Delta_2} \left[(l_4(b-a) \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda - l_1 l_3) \tilde{R}_3 + (l_4 l_3 + (b-a)l_1) \tilde{R}_4 \sin \lambda \cos \lambda \right] + T_\lambda^0. \quad (9)$$

Тут введено позначення

$$T_\lambda^0 = \frac{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda}{\Delta_1 \Delta_2} \left[(\beta_1 \beta_2 (1+\beta_1 + \beta_2) - \nu_x) b \cos \lambda \frac{X_0}{2\pi} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2 - \nu_x) a \sin \lambda \frac{Y_0}{2\pi} \right];$$

$$l_1 = a^2 \sin^2 \lambda - b^2 \beta_1 \beta_2 \cos^2 \lambda; \quad l_2 = a \sin^2 \lambda - b \cos^2 \lambda; \quad l_3 = a \sin^2 \lambda + b \cos^2 \lambda;$$

$$l_4 = ab(\beta_1 + \beta_2); \quad \Delta_j = a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \beta_j^2 \cos^2 \lambda, \quad (j=1, 2);$$

$$R_1 = -2T_\rho^* + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[T_\rho^0(t) - S_{\rho\lambda}^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} \left[\tilde{T}_\rho(t) - \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt;$$

$$R_2 = -2S_{\rho\lambda}^* + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[S_{\rho\lambda}^0(t) + T_\rho^0(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} \left[\tilde{S}_{\rho\lambda}(t) + \tilde{T}_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right] dt;$$

$$R_3 = -4T_\rho^* - R_1; \quad R_4 = 4S_{\rho\lambda}^* + R_2; \quad \tilde{R}_3 = R_3 \cos 2\lambda + R_4 \sin 2\lambda; \quad \tilde{R}_4 = R_4 \cos 2\lambda - R_3 \sin 2\lambda;$$

$$\{T_\rho^*(\lambda), S_{\rho\lambda}^*(\lambda)\} = \begin{cases} \{T_\rho^0(\lambda), S_{\rho\lambda}^0(\lambda)\}, & \lambda \in [\alpha_0, \beta_0] \\ \{\tilde{T}_\rho(\lambda), \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda)\}, & \lambda \in [\pi+\alpha_1, \pi+\beta_1] \\ 0, & \lambda \in [\beta_0, \pi+\alpha_1] \cup [\pi+\beta_1, \alpha_0] \end{cases}.$$

Співвідношення (5)–(9) визначають математичну модель поставленої задачі. Розглянемо її часткові випадки:

- якщо в (5)–(9) покласти $\beta_1 = \beta_2 = 1$, то отримаємо математичну модель задачі для ізотропної пластинки з еліптичним отвором [4];
- приймаючи в (5)–(9) $\varepsilon=0$, знаходимо відповідну систему співвідношень для

ортотропної пластинки з круговим отвором;

- при $\beta_0 - \alpha_1 = \pi$, $\alpha_0 - \beta_1 = -\pi$ зона відставання пластинки від диска відсутня. Це означає, що береги розрізів змикаються повністю. Для визначення граничної величини зони контакту служать умови $T_\rho(\alpha_0) = T_\rho(\beta_0) = 0$. Якщо зона контакту менша від граничної, то зони спаю і контакту будуть накладатися. При цьому нормальні зусилля T_ρ будуть неперервними на контурі Γ .

Наближений розв'язок задачі. Знаходження точного розв'язку системи (5)–(6) за умов силової і моментної рівноваги (7) пов'язано зі значними математичними труднощами.

Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру контактних зусиль на кінцях зони контакту і підсилення. Оскільки на ділянці $[\alpha_0, \beta_0]$ контакт гладкий, то $T_\rho(\alpha_0) = T_\rho(\beta_0) = 0$; $S_{\rho\lambda} = 0$. На кінцях зони спаю пластинки і диска контактні зусилля мають кореневу особливість. Враховуючи це, наближений розв'язок задачі можна реалізувати числово-аналітичним методом механічних квадратур і колокації, запропонованим у [7].

Для ортотропної пластинки з параметрами $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$; $X_0 = X_0$; $Y_0 = M_0 = 0$ досліджено вплив на її напружено-деформований стан форми отвору, ортотропії матеріалу. Результати числового розрахунку контактних $\frac{T_\rho}{X_0}$, $\frac{S_{\rho\lambda}}{X_0}$ зусиль і нормальних зміщень $\frac{2E_x h U_n}{X_0}$ на контурі отвору проілюстровано на рисунку 2 ($\varepsilon = 0$), рисунку 3 ($\varepsilon = 0.2$), рисунку 4 ($\varepsilon = -0.2$). Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і лінії, які відповідають цим матеріалам на рисунках 2–4, наведено в таблиці 1, в якій значення полярних кутів визначають зону контакту.

Таблиця 1

Матеріал пластинки	β_1	β_2	ν_x	$\frac{E_x}{E_y}$	Вид лінії	$-\alpha_0 = \beta_0$ (град).		
						$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = -0.2$
Ізотропний матеріал	1	1	0.300	1	—	66.99	51.37	77.51
Скло-епоксид	2.271	0.762	0.250	3	— — — — —	70.13	55.44	79.47
Графіт-епоксид	6.999	0.714	0.250	25	— — — — —	63.53	47.22	75.26
Епоксид-скло	0.440	1.310	0.083	1/3	— — — — —	57.30	40.56	70.84
Епоксид-графіт	0.143	1.401	0.010	1/25	— — —	75.85	63.79	82.79

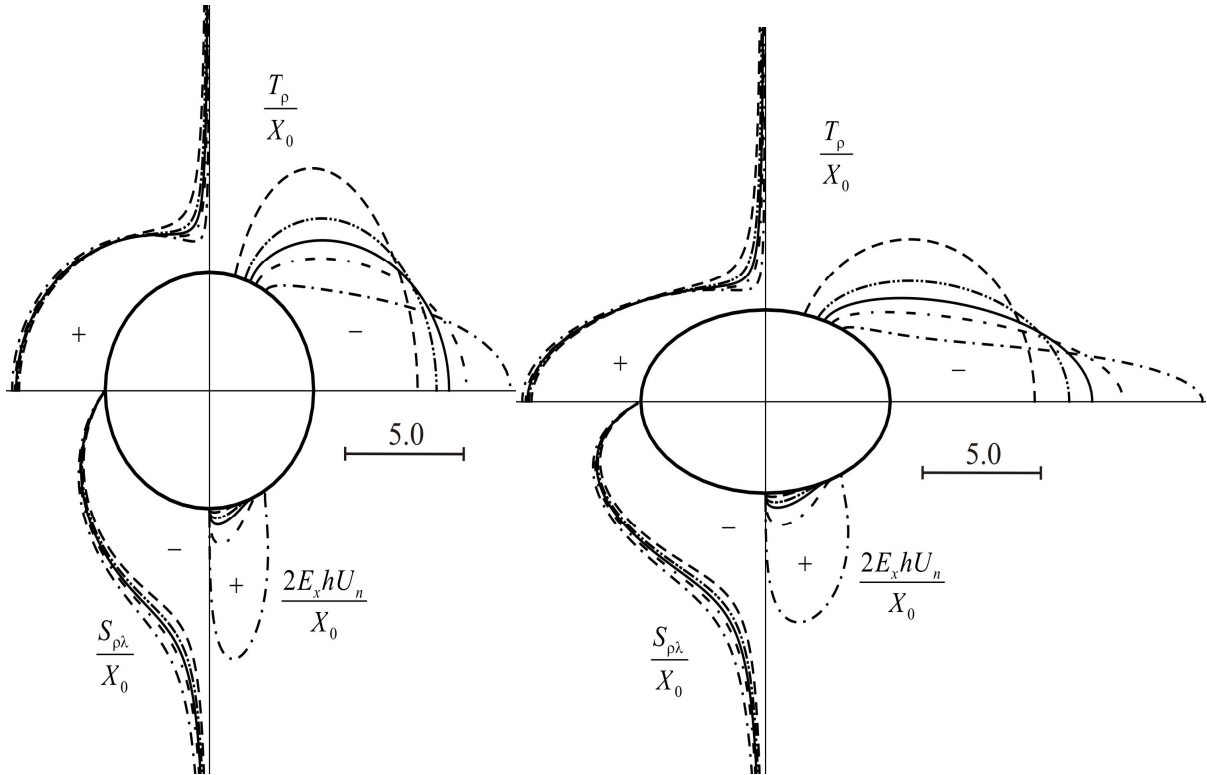


Рисунок 2. Епюри розподілу зусиль T_ρ/X_0 , $S_{\rho\lambda}/X_0$, $2E_x h U_n/X_0$ на контурі отвору при $\varepsilon = 0$

Рисунок 3. Епюри розподілу зусиль T_ρ/X_0 , $S_{\rho\lambda}/X_0$, $2E_x h U_n/X_0$ на контурі отвору при $\varepsilon = 0.2$

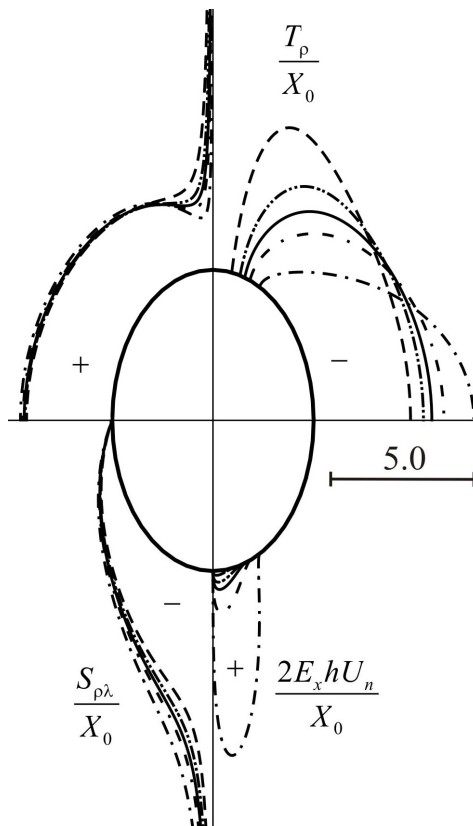


Рисунок 4. Епюри розподілу зусиль T_ρ/X_0 , $S_{\rho\lambda}/X_0$, $2E_x h U_n/X_0$ на контурі отвору при $\varepsilon = -0.2$

Аналіз отриманих результатів призводить до висновків:

- ортотропія матеріалу суттєво впливає на розподіл нормальних зусиль у зоні гладкого контакту. В зоні спаю вплив ортотропії на величину контактних зусиль незначний;
- максимумами зусиль T_ρ/X_0 на ділянці контакту зміщуються до зон з більшою кривиною;
- зі збільшенням кривини зони контакту її величина для всіх ортотропних матеріалів зменшується.

Література

1. Грилицкий Д.В. Контактные напряжения в пластинке с криволинейными разрезами, кромки которых соприкасаются / Д.В. Грилицкий, Р.М. Луцишин // Докл. конф. НИИ МашАШ. – М., 1969. – С. 40–49.
2. Грилицкий Д.В. Напряженное состояние анизотропной пластинки с впаянным изотропным ядром при наличии разрезом на спае / Д.В. Грилицкий, Р.М. Луцишин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1962. – № 2. – С. 159–165.
3. Грилицкий Д.В. Напряжения в пластинках с кривою лінією розмежування граничних умов / Д.В. Грилицкий, Р.М. Луцишин. – Львів: видавництво “Вища школа” при ЛДУ, 1975. – 111 с.
4. Сяський В.А. Мішана контактна задача для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / В.А. Сяський, А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 139–146.
5. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
6. Сяський А. Контакт двозв'язного штампа з кутовими точками і криволінійного отвору нескінченної пластинки / Андрій Сяський, Володимир Сяський // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів, 2000. – Т.2. – С. 122–125.
7. Трохимчук О. Тиск системи двох штампів з кутовими точками на частково підсилений контур еліптичного отвору ортотропної пластинки / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2010. – Т.15. – № 1. – С. 14–20.
8. Сяський А.О. Граничні умови контактних задач для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А.О. Сяський, С.М. Комбель // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип. 9. – С. 93–97.

Отримано 2.11.2010